1. Valor esperado de una variable aleatoria

Cuando se piensa en el valor esperado de una variable aleatoria, intuitivamente, estamos pensando en un promedio ponderado de los valores que puede tomar la variable y su probabilidad. Con eso en mente, se puede definir formalmente de la siguiente forma.

<u>Definición</u>: Sea Y una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $p(y)$. Entonces, el valor esperado de Y, $E(Y)$, se define como:

$$E(Y) = \sum_{y} yp(y).$$

Si lo que se tiene no es una variable aleatoria, sino una función de ella, entonces el valor esperado se calcula siguiendo el próximo teorema.

<u>Teorema</u>: Sea Y una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $p(y)$ y sea $g(Y)$ una función de valor real de Y, entonces la siguiente expresión da el valor esperado de $g(Y)$

$$E[g(Y)] = \sum_{y} g(y)p(y).$$

Otra medida de importancia es la varianza, que se puede interpretar como la dispersión de los valores de la variable aleatoria respecto al valor esperado.

<u>Definición</u>: La varianza de una variable aleatoria Y, con valor esperado μ, se define como el valor esperado de $(Y-\mu)^2$. Es decir:

$$V(Y) = E[(Y-\mu)^2].$$

La desviación estándar de Y es la raíz cuadrada positiva de $V(Y)$, y usualmente es denotada como σ, mientras que la varianza es denotada como σ^2.

<u>Ejercicio</u>. Se lanza un dado una sola vez. Si Y es el número que aparece en la cara superior, encuentre el valor esperado y la varianza de Y.

<u>Solución</u>.
Como sabemos, si suponemos un dado justo, la probabilidad de cualquiera de las caras es $1/6$. Por lo tanto:

$$E(Y) = \sum_{y} yp(y) = 1(1/6) + 2(1/6) + 3(1/6) + 4(1/6) + 5(1/6) + 6(1/6)$$

$$= (1/6)(1+2+3+4+5+6) = 21/6 = 7/2 = 3{,}5.$$

Por lo tanto $\mu = 3{,}5$, y de ahí

$$V(Y) = E[(Y-\mu)^2] \overset{\bigstar}{=} \sum_{y} (Y-\mu)^2 p(y)$$

$$= (1-3{,}5)^2(1/6)+(2-3{,}5)^2(1/6)+(3-3{,}5)^2(1/6)+(4-3{,}5)^2(1/6)+(5-3{,}5)^2(1/6)+(6-3{,}5)^2(1/6)$$

$= 6{,}25/6 + 2{,}25/6 + 0{,}25/6 + 0{,}25/6 + 2{,}25/6 + 6{,}25/6 = 17{,}5/6 = 2{,}9167.$

★ Fijese que se usa el teorema anteriormente visto, tomando $g(Y) = (Y - \mu)^2$.

Ahora hay algunas propiedades de gran intéres acerca de el valor esperado y la varianza.

<u>Teorema</u>: Si Y es una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $p(y)$ y c es una constante, entonces $E(c) = c$.

<u>Demostración</u>.
Sea $g(Y) = c$, entonces

$$E(c) = \sum_y cp(y) \overset{\Diamond}{=} c \sum_y p(y) \overset{\triangle}{=} c.$$

$\Diamond$ Como c es constante y no depende de y, sale de la suma. $\triangle$ Por teorema de la clase anterior $\sum_y p(y) = 1$.

<u>Teorema</u>: Si Y es una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $p(y)$, $g(Y)$ es una función de Y, y c es una constante, entonces

$$E[cg(Y)] = cE[g(Y)].$$

05-38657

<u>Demostración</u>.
Ejercicio.

<u>Teorema</u>: Sea Y una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $p(y)$ y sean $g_1(Y)$, $g_2(Y)$, ..., $g_k(Y)$, k funciones de Y. Entonces,

$$E[g_1(Y) + g_2(Y) + ... + g_k(Y)] = E[g_1(Y)] + E[g_2(Y)] + ... + E[g_k(Y)].$$

<u>Demostración</u>.
Ejercicio.

<u>Teorema</u>: Si Y es una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $p(y)$, entonces

$$V(Y) = \sigma^2 = E[(Y - \mu)^2] = E[Y^2] - \mu^2.$$

<u>Demostración</u>.

$$V(Y) = E[(Y - \mu)^2] = E[Y^2 - 2Y\mu + \mu^2]$$

Tomando en cuenta los últimos dos teoremas nos queda que:

$$= E[Y^2] - 2\mu E[Y] + \mu^2$$

Pero como $E[Y] = \mu$, entonces

$$= E[Y^2] - 2\mu^2 + \mu^2 = E[Y^2] - \mu^2.$$

<u>Ejercicio</u>. Sea Y una variable aleatoria discreta con valor esperado μ y varianza σ^2. Si a y b son constantes demuestre que

a) $E[aY + b] = a\mu + b$.
b) $V(aY + b) = a^2\sigma^2$.

<u>Demostración</u>.
Parte a)

Usando los teoremas anteriores

$$E[aY + b] = E[aY] + E[b] = aE[Y] + b = a\mu + b.$$

Parte b)

$$V(aY + b) = E[(aY + b)^2] - (a\mu + b)^2 = E[a^2Y^2 + 2abY + b^2] - (a^2\mu^2 + 2ab\mu + b^2)$$
$$= a^2E[Y^2] + 2abE[Y] + b^2 - a^2\mu^2 - 2ab\mu - b^2 = a^2(E[Y^2] - \mu^2) = a^2\sigma^2.$$